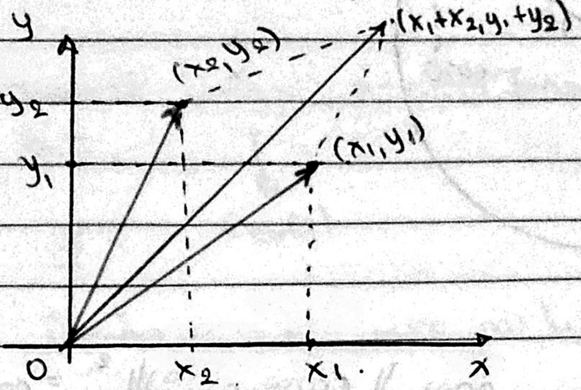
Απειροστικός Λογισμός III — 11/10/2016

2η εβδομάδα / 2ο μάθημα: Επαναλάβαμε χτες τις αλγεβρικές ιδιότητες του $\mathbb{R}^n$.
Αυτές (υπενθύμιση) φαίνονται και γεωμετρικά.

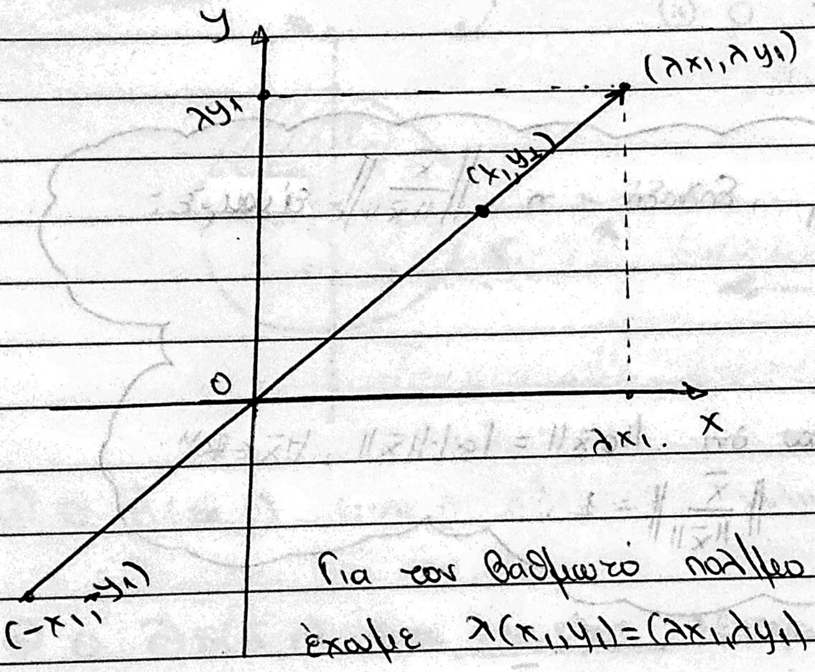
(πχ) Στον $\mathbb{R}^2$:



Στο σημείο (x_1,y_1) αντιστοιχεί το διάνυσμα με αρχή το $O(0,0)$ και πέρας το (x_1,y_1).

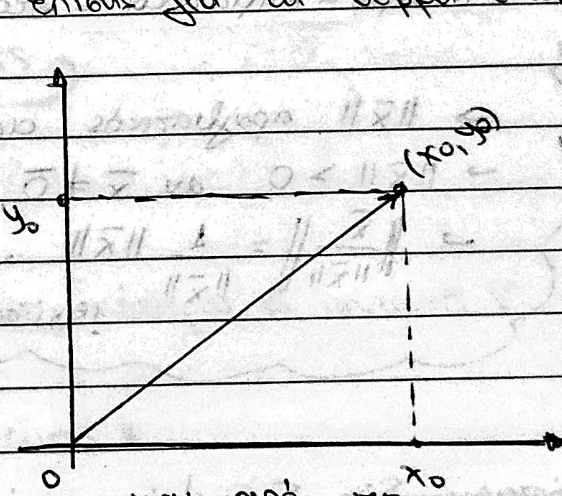
Για την πρόσθεση των δύο διανυσμάτων έχουμε:

$(x_1,y_1)+(x_2,y_2)=(x_1+x_2,y_1+y_2)$



Για τον βαθμωτό πολλαπλ. έχουμε $\lambda(x_1,y_1)=(\lambda x_1,\lambda y_1)$

Επίσης για τη νόρμα έχουμε



και από το πυθαγόρειο θεώρημα προκύπτει ο τύπος:

$\|(x_0,y_0)\| = \sqrt{x_0^2+y_0^2}$

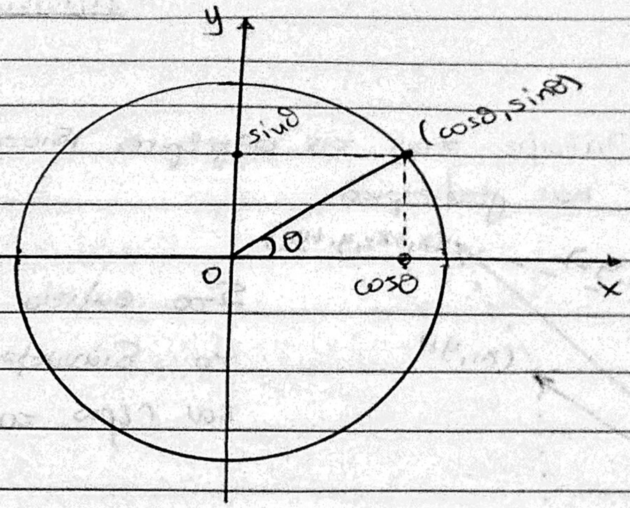
Για τη γωνία δύο διανυσμάτων ισχύει:

$$\cos\theta = \frac{\bar{x}\cdot\bar{y}}{\|\bar{x}\|\cdot\|\bar{y}\|}$$

, όπου $\theta\in[0,\pi]$ είναι η κυρτή γωνία μεταξύ των $\bar{x},\bar{y}\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$.

2))

Τριγωνομετρικός κύκλος:



$\cos\theta = \underbrace{(\cos\theta, \sin\theta) \cdot (1,0)}_{\vec{e_1}}$, όπου $\|(\cos\theta, \sin\theta)\|^2 = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$.

και $\|\vec{e_1}\| = \sqrt{1^2+0^2} = 1$

αντίστοιχα
$\Rightarrow$
αναλόγως $\cos\theta = \dfrac{\bar{x}}{\|\bar{x}\|} \cdot \dfrac{\bar{y}}{\|\bar{y}\|}$

Για τη νόρμα του διανύσματος $\dfrac{\bar{x}}{\|\bar{x}\|}$, δηλαδή η $\left\|\dfrac{\bar{x}}{\|\bar{x}\|}\right\|$ έχουμε:

- $\rightarrow$ $\|\bar{x}\|$ πραγματικός αριθμός
- $\rightarrow$ $\|\bar{x}\| > 0$ αν $\bar{x} \neq \bar{0}$
- $\rightarrow$ $\left\|\dfrac{\bar{x}}{\|\bar{x}\|}\right\| = \dfrac{1}{\|\bar{x}\|}\|\bar{x}\|$. Δεδομένου ότι $\|a\bar{x}\| = |a|\cdot\|\bar{x}\|$, $\forall \bar{x} \in \mathbb{R}^n$. Ισχύει ότι $\left\|\dfrac{\bar{x}}{\|\bar{x}\|}\right\| = 1$.

Απόσταση δύο διανυσμάτων όπου $\bar{a} = (x_1, y_1)$ και $\bar{b} = (x_2, y_2)$, δίνεται από το μήκος του διανύσματος $\bar{b} - \bar{a}$ άρα: $\|\bar{b} - \bar{a}\|$ για το οποίο ισχύει $\|\bar{b} - \bar{a}\| = \|-(\bar{a} - \bar{b})\| = \|\bar{a} - \bar{b}\|$

Ορισμός: Τα σύνολα $B(\bar{x}, r) := \{\bar{y} \in \mathbb{R}^n : \|\bar{x}-\bar{y}\| < r\}$

$$\bar{B}(\bar{x}, r) := \{\bar{y} \in \mathbb{R}^n : \|\bar{x}-\bar{y}\| \le r\} \quad \text{με } r>0$$

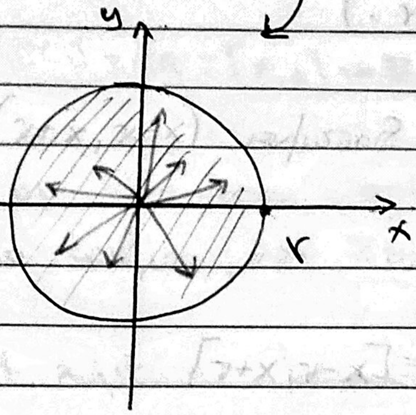
$$\partial B(\bar{x}, r) := \{\bar{y} \in \mathbb{R}^n : \|\bar{x}-\bar{y}\| = r\}$$

ονομάζονται ανοικτή μπάλα, κλειστή μπάλα, σφαίρα αντίστοιχα στον $\mathbb{R}^n$.

(ball) (sphere)

** τα $\bar{x}$ και r ξέρουμε τι είναι, αυτό που μετακινείται στο σύνολο είναι το $\bar{y}$.

Στον $\mathbb{R}^2$: $\bar{x} = (0,0)$



⊛ Ο $B(\bar{\alpha}, r)$ είναι ο ανοικτός κυκλικός δίσκος ακτίνας r και κέντρου $\bar{\alpha}$. Στην περίπτωση που $\vec{\alpha} = (0,0)$ τότε έχουμε ανοικτό κυκλικό δίσκο της μορφής

⊛ Ο $\bar{B}(\bar{\alpha}, r)$ είναι ο κλειστός κυκλικός δίσκος κέντρου $\bar{\alpha}$, ακτίνας r

⊛ Ο $\partial B(\bar{\alpha}, r)$ είναι ο κύκλος κέντρου $\bar{\alpha}$, ακτίνας r

---

⊛ Η μπάλα, η κλειστή μπάλα και η σφαίρα ανήκουν στο χώρο που ανήκει το $\bar{x}$.

Παρατηρούμε ότι :

$$\overline{B}(\bar{x},r) = B(\bar{x},r) \cup \partial B(\bar{x},r)$$

Στον $\mathbb{R}^1$: $B(\bar{x},r) = \{\bar{y}\in\mathbb{R} : \|\bar{x}-\bar{y}\|<r\}$

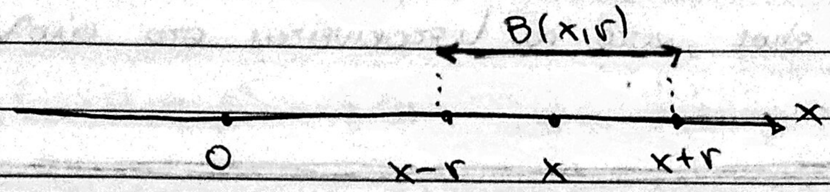
$\|(x_1-y_1,\dots,x_n-y_n)\| = \sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^{1/2} =$

αντίστοιχα

$B(\underset{\in\mathbb{R}}{x},r) = \{y\in\mathbb{R} : |x-y|<r\}$

$\overset{n=1}{=} ((x_1-y_1)^2)^{1/2} =$

$= |x_1-y_1|$



$(|x-y|<r \Leftrightarrow -r<x-y<r \Leftrightarrow x-r<y<x+r.)$

Δηλαδή $B(x,r)$ στον $\mathbb{R}$ είναι το ανοικτό διάστημα $(x-r,x+r)$

$\overline{B}(\bar{x},r) = \{\bar{y}\in\mathbb{R} : \|\bar{x}-\bar{y}\|\leq r\}.$

$\overline{B}(x,r) = \{y\in\mathbb{R} : |x-y|\leq r\} = [x-r,x+r]$

$\partial B(x,r) = \{y\in\mathbb{R} : |x-y| = r\} = \{x-r, x+r\}$

Ερώτηση: Γιατί αυτή η υστερία με τα ανοικτά και κλειστά σύνολα;

Απάντηση-Παράδειγμα: Το $(0,1) \subset \mathbb{R}$ είναι ένα ανοικτό διάστημα.

Περιέχει τα σημεία $\frac{1}{\nu}, \nu \in \mathbb{N}, \nu \geq 2$

$$\frac{1}{\nu} \xrightarrow[\nu \to \infty]{} 0 \notin (0,1) \text{ αλλά } \in [0,1]$$

** Ένα σύνολο είναι κλειστό ανν για κάθε συγκλίνουσα ακολουθία βρίσκαμε το όριό της μέσα στο σύνολο. **

Ορισμός: Ένα $U \subset \mathbb{R}^n$ λέγεται ανοικτό αν $\forall \bar{x} \in U \ \exists \varepsilon > 0 : B(\bar{x}, \varepsilon) \subset U$

κλειστό αν το $\mathbb{R}^n \setminus U$ είναι ανοικτό.

Παράδειγμα: $f : (0,1] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{10}$

$g : [\varepsilon, 1] \to \mathbb{R}$ με $g(x) = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{4}$

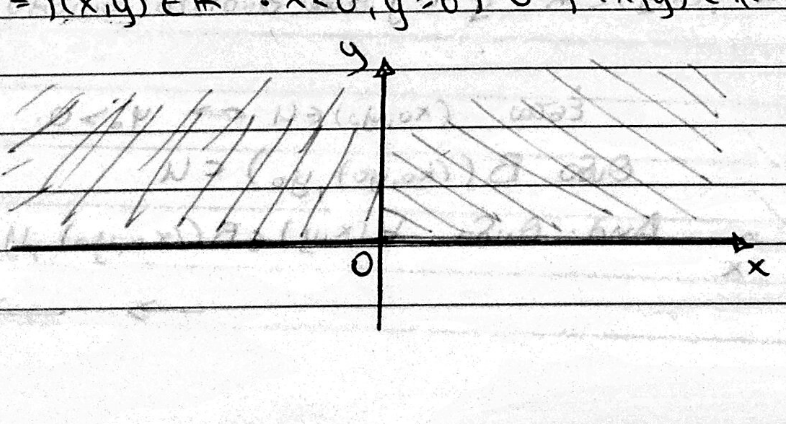
και οι δύο είναι συνεχείς, έχουν ίδιο τύπο, όμως διαφορετικό πεδίο ορισμού, άρα δεν είναι ίσες.

Η f λαμβάνει μέγιστο και η g λαμβάνει και ελάχιστο και μέγιστο

! Παρατήρηση: Υπάρχουν, φυσικά, (τα περισσότερα) σύνολα δεν είναι ούτε ανοικτά ούτε κλειστά.

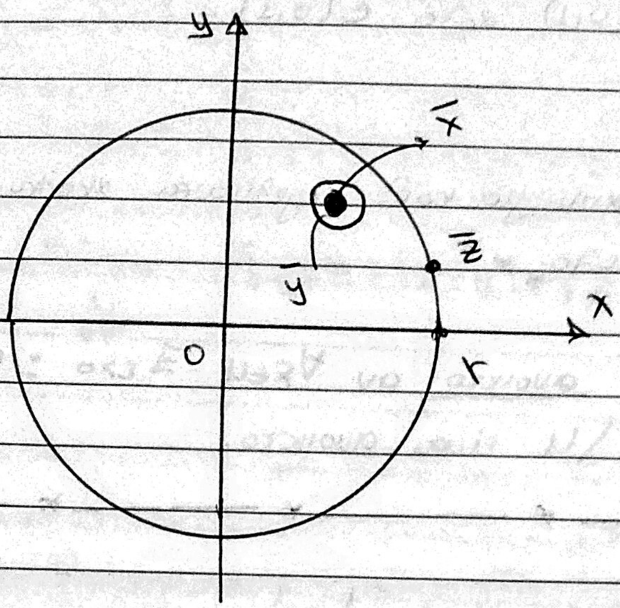
(π.χ)

$$U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0, y \geq 0\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y > 0\} \subset \mathbb{R}^2$$



Πρόταση: Κάθε "ανοιχτή μπάλα" είναι ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$

Απόδειξη: Η ιδέα είναι να φανταστώ χώρους κατανοητούς, όπως πχ $\mathbb{R}^2$.



Έστω $\bar{x} \in B(\bar{a}, r)$ με $\bar{a} \in \mathbb{R}^n$, $r>0$, δλδ $\|\bar{x}-\bar{a}\| < r$

δηλαδή $\|\bar{x}-\bar{a}\| = r-\varepsilon$, $\varepsilon>0$

Ισχυρισμός: $B(\bar{x}, \varepsilon) \subset B(\bar{a}, r)$ ⟵ Θ.δ.ο

δηλαδή Θ.δ.ο $\underbrace{\bar{y} \in B(\bar{x}, \varepsilon)}_{\|\bar{y}-\bar{x}\| < \varepsilon} \Rightarrow \underbrace{\bar{y} \in B(\bar{a}, r)}_{\|\bar{y}-\bar{a}\| < r.}$

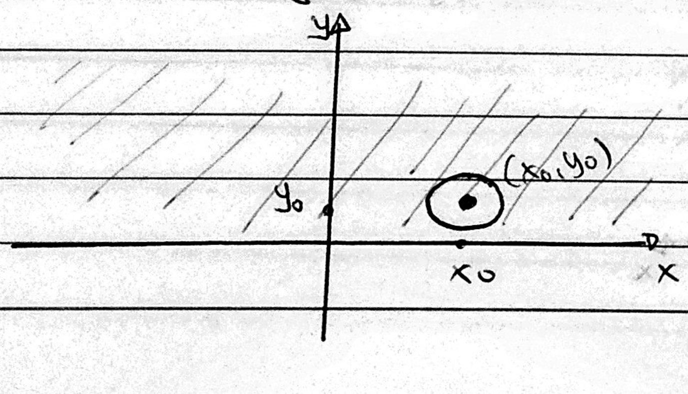
όπου γνωρίζω ότι $\|\bar{x}-\bar{a}\| = r-\varepsilon$

Έχουμε από την τριγωνική ανισότητα, ότι:

$$\|\bar{y}-\bar{a}\| \le \underbrace{\|\bar{y}-\bar{x}\|}_{<\varepsilon} + \underbrace{\|\bar{x}-\bar{a}\|}_{=r-\varepsilon} < \varepsilon + r - \varepsilon = r$$

$\|\bar{y}-\bar{a}\| = \|\bar{y}-\bar{x}+\bar{x}-\bar{a}\|$

Άσκηση: Δείξτε ότι το $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y>0\}$ είναι ανοιχτό σύνολο



Έστω $(x_0, y_0) \in U \Leftrightarrow y_0 > 0$.

Θ.δ.ο $B((x_0,y_0), y_0) \subset U$

Δηλ. Θ.δ.ο $\forall (x,y) \in B((x_0,y_0), y_0) : y>0$

⟶ ⟶

$\Leftrightarrow \|(x-x_0, y-y_0)\| < y_0 \Leftrightarrow (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 < y_0^2$

Έχω, ειδικότερα $(y-y_0)^2 < y_0^2 \Leftrightarrow |y-y_0| < y_0 \Leftrightarrow$ θετικό

$\Leftrightarrow -y_0 < y - y_0 < y_0 \Rightarrow 0 < y < 2y_0$, δείξαμε ότι $y>0$.

αυτό που θέλαμε